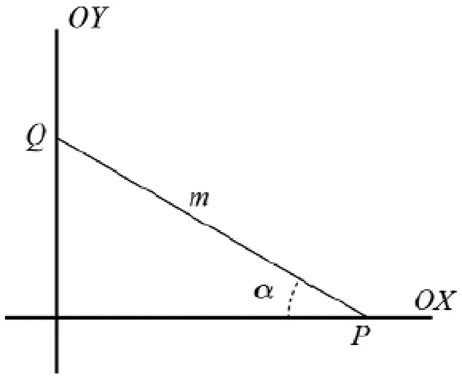
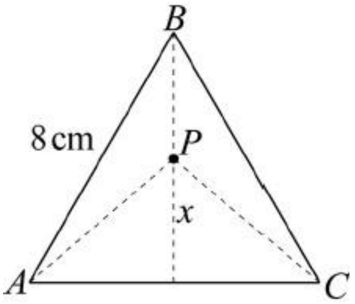
1. [PAU10J1Q3] Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle ✔ que forma el segment amb l'eix *OX* perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



2. [PAU10S2Q3] Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum *V* fixat. Anomeneu *x* el costat de la base del prisma i *y* la seva altura.
   a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.
   b) Comproveu que el que té l'àrea total mínima és en realitat un cub.

3. [PAU11J4Q6] Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.
   a) Feu un esbós de la situació descrita.
   b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit, i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x + 3y = 12$.
   c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

4. [PAU12J3Q5] Un triangle equilàter de vèrtexs *A*, *B* i *C* té els costats de 8 cm. Situem un punt *P* sobre una de les altures del triangle, a una distància *x* de la base corresponent.



   a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtex ABC.
   b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtex (en funció de x).
   c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtex sigui mínima.

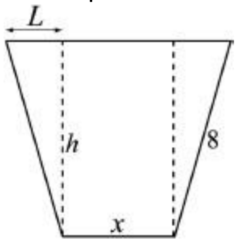
5. [PAU12S4Q4] Una fàbrica produeix diàriament *x* tones d'un producte *A* i (40 − 5*x*)/(10– *x*)

tones d'un producte *B*. La quantitat màxima de producte *A* que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte *A* és 100€ per tona i el del producte *B* és 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

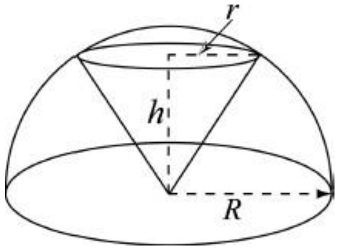
b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

6. [PAU13J4Q4] Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres.
   A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



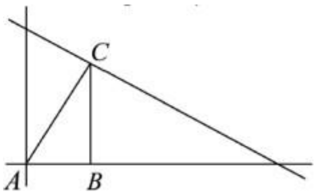
   a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).
   b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció es donada per: $A(x) = \frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$
   c) Calculeu el valor de x per a que l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment el màxim).

7. [PAU13J3Q5] En una semiesfera de radi *R* inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



   a) Sabent que el volum d'un com és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com $V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$
   b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

8. [PAU13J5Q6] Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex B(x, 0) en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.

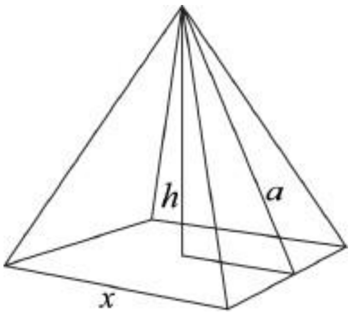


a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent:

$$A = 2x - \frac{x^2}{4}$$

b) Trobeu els vèrtex B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

9. [PAU13S1Q6] Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l' elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem *x* la longitud d' un costat de la base de la tenda.



a) Saben que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas, $V = \frac{x\sqrt{(9\cdot 10^4)-x^4}}{6}$.

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

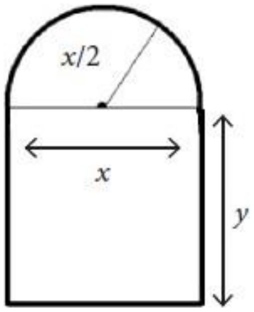
10. [PAU14J3Q3] Un nedador és al mar en un punt *N*, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt *S*, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt *A*, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt *S*, de manera que el triangle *NSA* és rectangle en el vèrtex *S*. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si *P* és un punt entre el punt *S* i el punt *A* que està a una distància *x* de *S*, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt *N* al punt *P* i caminar des del punt *P* fins al punt *A* és determinat per l'expressió:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$$

b) Calculeu el valor de *x* que determina el temps mínim que cal per a anar del punt *N* al punt *A*, passant per *P*. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

11. [PAU15J2Q6] La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què *x* és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i *y* és l'alçària de cada columna.



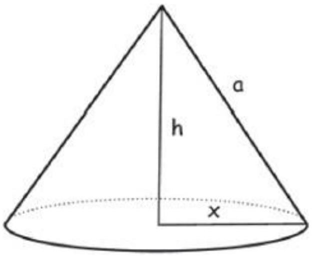
   a) Comproveu que la funció $f(x,y)=\frac{\pi x^2}{8}+xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.
   b) Si el perímetre de la portalada fa 20m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitza l'àrea.

12. [PAU15S5Q5] Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.
   a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$.
   b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

13. [PAU16S1Q3] Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50% més car.

   a) Si x és la mesura del preu, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x)=2{,}5x^2+\frac{320}{x}$
   b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

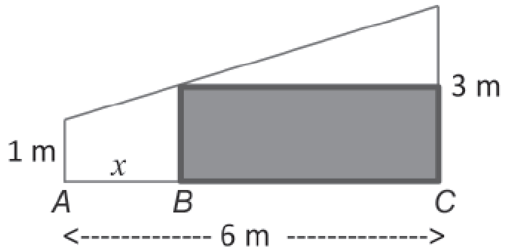
14. [PAU17J1Q6] Considereu un con de 120 cm^3 de volum que té una altura *h*, un radi de la base *x* i una aresta *a*, com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$
b) Comproveu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.

Nota: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura del con.

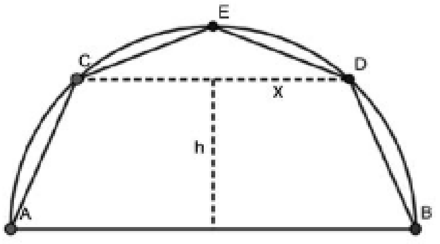
15. [PAU17J5Q6] El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la xona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB.
b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.

16. [PAU20J1] Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt $P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.
   a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a,ve donada per al funció
   $$g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$$
   b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

17. [PAU20S4Q5] Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon $ACEDB$, tal com es mostra en la figura.

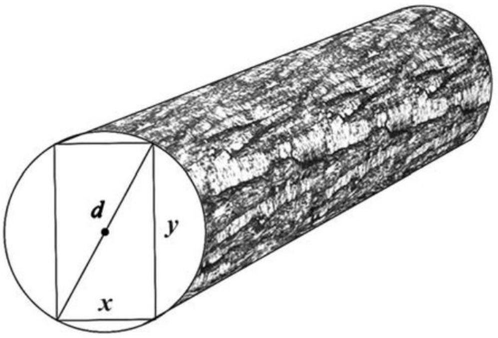


a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon $ACEDB$.

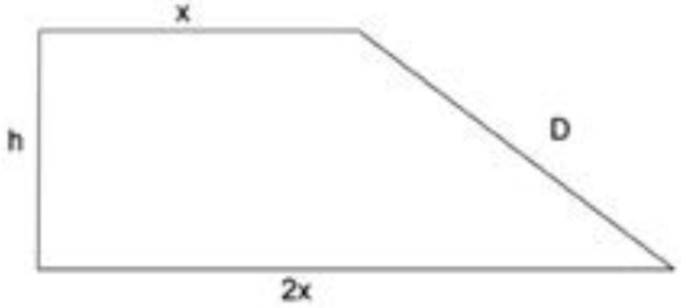
b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon $ACEDB$ sigui màxima?

18. [PAU 21 J2Q1] Considereu la paràbola $y=4-x^2$ i un valor $a>0$.
    a. Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x=a$ és $y=-2ax+a^2+4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.
    b. Calculeu el valor de $a>0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

19. [PAU 21 J5Q4] La resistència al trencament R d'una biga de secció rectangular de base x i altura y és directament proporcional al producte xy^2; per tant, $R=kxy^2$, en què k és una constant positiva. Disposem d'un tronc de fusta en forma de cilindre de diàmetre d com el de la figura.
    a. Comproveu que la resistència R de la biga rectangular de base x que podem construir amb aquest tronc ve donada per l'expressió $R=kx(d^2-x^2)$.
    b. Calculeu les dimensions de la biga rectangular de resistència màxima que podem construir a partir d'aquest tronc i calculeu aquesta resistència màxima

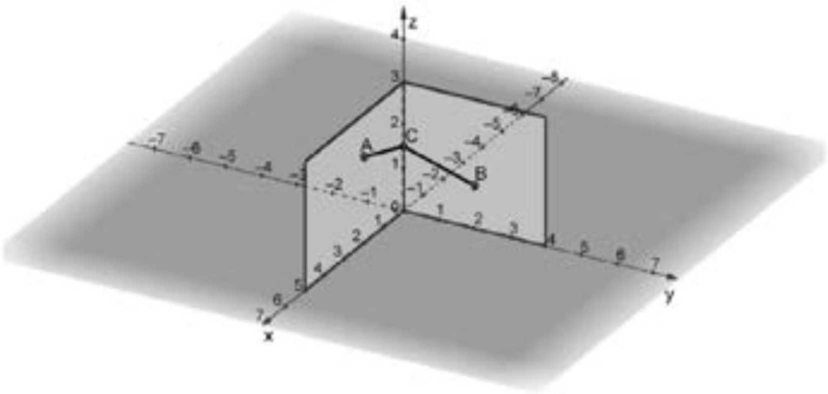


20. [PAU 22 J2Q6] Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.
    a. Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h=\dfrac{20}{x}$ i $D(x)=\sqrt{\dfrac{400}{x^2}+x^2}$.
    b. Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.



21. [PAU 22 J5Q4] A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts O= (0, 0), A= (x, 0) i B= (0, y), amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.
    a. Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
    b. Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?

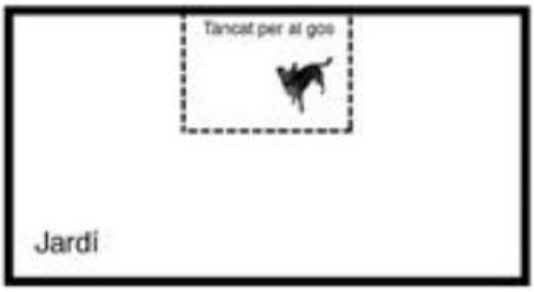
22. [PAU 22 S3Q6] La imatge següent mostra dues parets perpendiculars d'una sala representades en uns eixos de coordenades, de manera que una paret és al pla y=0 i l'altra és al pla x=0.



En el punt A=(2, 0, 2) hi volem penjar un altaveu que ha d'estar connectat a un equip de so, el qual està situat a l'altra paret, en el punt B=(0, 2, 1). La connexió entre A i B la farem mitjançant un cable que passi pel punt C=(0, 0, h), situat a la recta vertical d'intersecció de les dues parets. Com que la qualitat del so depèn, entre altres factors, de la longitud del cable que uneix els dos aparells, volem fer una instal·lació amb el mínim de cable possible.

a. Comproveu que la longitud total del cable necessari, en funció de l'altura per on ha de passar el cable a l'eix vertical OZ, ve donada per l'expressió $L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$
b. Calculeu les coordenades del punt C per on ha de passar el cable per tal que la longitud del cable sigui mínima. Calculeu aquesta longitud mínima del cable.

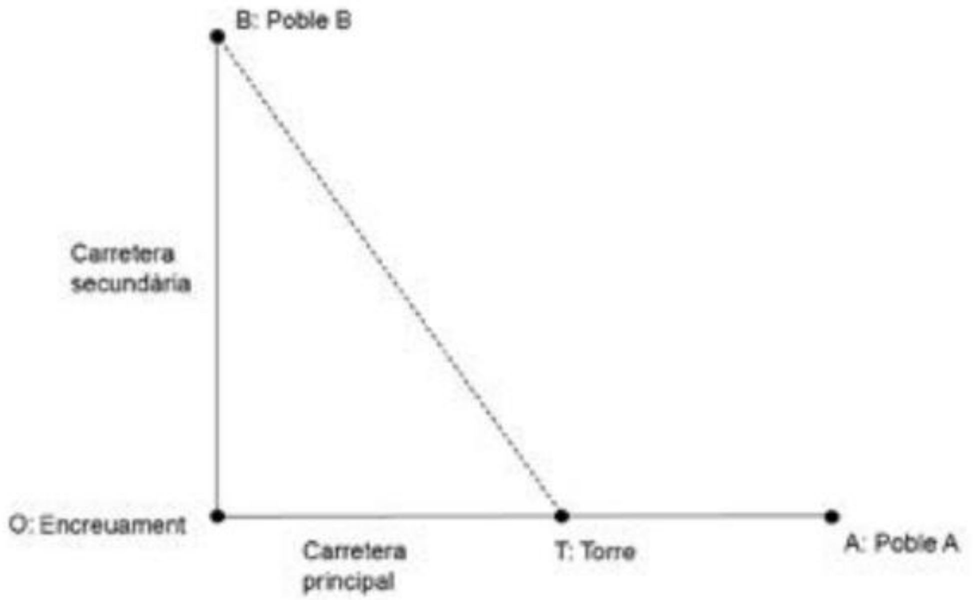
23. [PAU23J1Q5] La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m^2 per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats. El preu de la tanca que vol fer servir és de 2,5 €/m.



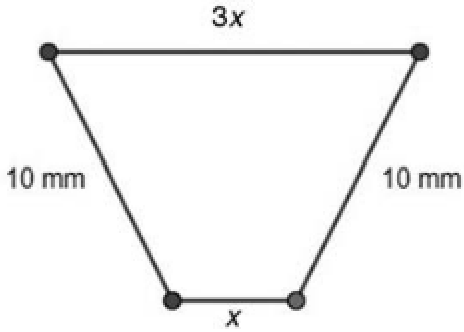
   a. Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?
   b. Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.

24. [PAU23J5Q4] En una carretera principal hi trobem el poble A. A 12 km del poble A, hi ha un encreuament O amb una carretera secundària que talla perpendicularment la carretera principal. A 9 km de l'encreuament, a la carretera secundària, hi trobem el poble B. Es vol construir una torre de comunicacions T en un punt de la carretera principal situat entre el poble A i l'encreuament O. Aquesta torre ha d'estar connectada amb cadascun dels dos pobles en línia recta per cable. Sabem que

instal·lar el cable entre la torre T i el poble B té un preu de 250 €/km i, en canvi, instal·lar el cable entre la torre T i el poble A té un preu de 125 €/km. Determineu a quina distància de l'encreuament O a la carretera principal cal situar la torre T perquè el preu del cablejat sigui mínim i quin serà el valor d'aquest preu mínim.

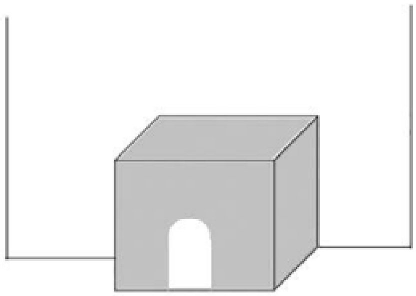


25. [PAU23S2Q6] Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:



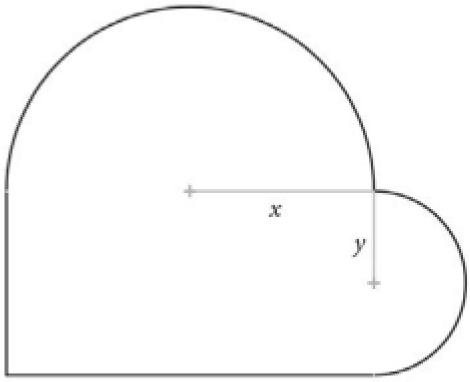
   a. Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
   b. Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.

26. [PAU24J1Q5] Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m3 de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



a. Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, on x és la fondària del cobert en metres.
b. Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?

27. [PAU24J5Q5] En Carles vol construir un decorat per a l'obra de teatre de final de curs en forma d'un rectangle i dos semicercles, tal com es mostra a la figura següent:



a. Determineu el perímetre i l'àrea del decorat que s'ha de construir en funció de x i de y.
b. Per a revestir el perímetre del decorat, en Carles té material per a cobrir fins a 10 m. Si el vol gastar tot, quines seran les mides del decorat d'àrea màxima que podrà construir? Quin és el valor d'aquesta àrea?

28. [PAU24J5Q5] Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts (0, 0), (x, 0), (0, y) i (x, y).
    a. Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té és el d'àrea màxima. Quin és el valor d'aquesta àrea?
    b. Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.